SVOLGERE LIMITI

SIMBOLI DI LANDAU

- o PICCOLO
  - Data $f(x)$ tale che ha limite per $x \to x_0$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ definiamo $o(f)[\text{per } x \to x_0] = \{g(x) \mid \lim_{x \to x_0} g(x)/f(x) = 0\}$ (possiamo anche prendere una generica funzione $g(x)$ che appartiene all'insieme come $o(f)$)
  - ESEMPI
    - x^a
      - $x_0=0$, $x^b=o(x^a) \iff b>a$
        - è una funzione che va a 0 più rapidamente di x^a
      - $x_0=+\infty$ $x^b=o(x^a) \iff b<a$
    - $P(x)=a_0+\ldots+a_n x^n$
      - $P(x)=a_n x^n+o(x^n)$ per $x \to \infty$
      - $P(x)=a_0+o(1)$ per $x \to 0$
- O GRANDE
  - Data $f(x)$ definiamo $O(f)[\text{per } x \to x_0] = \{g(x) \mid \exists c>0$ e U intorno di x_0 tale che $|g(x)| \leq c|f(x)|$ $\forall x \in U, x \neq x_0\}$ (possiamo anche prendere una generica funzione $g(x)$ che appartiene all'insieme come $O(f)$)
  - In particolare $o(f) \subseteq O(f)$ (vale la stessa definizione per $o(f)$ ma con $<$ anziché $\leq$)
  - ESEMPI
    - x^a
      - $x_0=0$, $x^b=O(x^a) \iff b \geq a$
      - $x_0=+\infty$ $x^b=O(x^a) \iff b \leq a$
    - $P(x)=a_0+\ldots+a_n x^n$
      - $P(x)=a_n x^n+O(x^{n-1})=O(x^n)$ per $x \to \infty$
- REGOLE
  - $f \cdot o(g)=o(f \cdot g)$
  - $O(f) \cdot O(g)=O(f \cdot g)$
  - $o(f) \cdot o(g)=o(f \cdot g)$
  - $o(f)+o(g)=o(\max(|f|,|g|))$
  - $O(f)+O(g)=O(\max(|f|,|g|))$

EQUIVALENZA ASINTOTICA

- $a_n \sim b_n$ se $\lim a_n/b_n=1$
- FORMULA DI STIRLING
  - $n! \sim [\sqrt{2\pi n}] \cdot (n/e)^n$

LIMITI NOTEVOLI

- $\lim_{x \to \pm\infty} (1+1/x)^x=e$
  - Deriva dal limite di successione $\lim_{n \to \infty} (1+1/n)^n = \lim_{n \to \infty} \sum 1/k! = \sum 1/k! = e$
    - dalla $\sum$ otteniamo $e \notin \mathbb{Q}$
  - Con la sostituzione $1/x=y$ otteniamo $\lim_{x \to 0} (1+x)^{(1/x)}=e$
  - $\lim_{x \to +\infty} (1+a/x)^x=e^a$
  - mentre per $0^+ \to 1$, per $0^- \to +\infty$
- $\lim_{x \to 0} \sin(x)/x=1$
  - cioè $\sin(x)=x+o(x)$
- $\lim_{x \to 0} \tan(x)/x=1$
  - cioè $\tan(x)=x+o(x)$
- $\lim_{x \to 0} (1-\cos(x))/x^2=1/2$
  - cioè $1-\cos(x)=x^2/2+o(x)$
- Seguono tutte dalla disuguaglianza $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)=\sin(x)/\cos(x)$ $x \in [0,\pi/2)$ $\iff 1 \leq x/\sin(x) \leq 1/\cos(x)$
- $\lim_{x \to 0} \arcsin(x)/x=1$
- $\lim_{x \to 0} \arctan(x)/x=1$
- $\lim_{x \to 0} \log(1+x)/x=1$
  - cioè $\log(1+x)=x+o(x)$
  - $\lim_{x \to 0} x^a \cdot \log(x)=0$ $a>0$
  - $\lim_{x \to 0} x^{-a} \cdot \log(x)=0$ $a>0$
  - Si fanno per sostituzione
- $\lim_{x \to 0} (1+x)^a-1/x=a$
- $\lim_{x \to 0} a^x-1/x=\log(a)$
- $\lim_{x \to 0} e^x-1/x=1$

CRITERI DI CONFRONTO

Valgono sia per limiti di successioni che di funzioni

- $f,g: E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $f \leq g$ in un intorno di x_0, $\lim_{x \to x_0} f(x)=\ell$, $\lim_{x \to x_0} g(x)=m \Rightarrow \ell \leq m$
  - È un corollario della permanenza del segno
- DUE CARABINIERI
  - $f,g,h: E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $f \leq h \leq g$ in un intorno di x_0, $\lim_{x \to x_0} f(x)=\lim_{x \to x_0} g(x)=\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} h(x)=\ell$
    - caso $\ell=+\infty$
      - $\forall V$ intorno di $+\infty$ del tipo $(a,+\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$, $\exists U$ intorno di x_0 tale che $f(x) \in V$ $\forall x \in U$, cioè $f(x)>a$ $\forall x \in U \Rightarrow h(x) \geq f(x)>a$ $\forall x$
    - caso $\ell=-\infty$
      - analogo
    - caso $\ell \in \mathbb{R}$
      - $\forall \varepsilon$ $\exists U$ intorno di x_0 tale che $f(x) \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ e $g(x) \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ $\forall x \in U \Rightarrow h(x) \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ $\forall x \in U \Rightarrow \lim_{x \to x_0} h(x)=\ell$
- Corollari
  - $\lim_{x \to x_0} f(x)=0 \iff \lim_{x \to x_0} |f(x)|=0$
    - $\Leftarrow$) $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ per il teorema $f(x) \to 0$
    - $\Rightarrow$) $\forall \varepsilon$ $\exists U$ intorno $f(x) \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ $\forall x \in U \Rightarrow |f(x)| \in [0,\varepsilon) \subseteq (-\varepsilon,\varepsilon) \Rightarrow \lim |f(x)|=0$
  - $f,g: E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} f(x)=0$, $|g(x)| \leq M$ in un intorno di $x_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x)g(x)=0$
    - $-M|f(x)| \leq f(x)g(x) \leq M|f(x)|$ in un intorno, $\lim_{x \to x_0} |f(x)|=0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} M|f(x)|=0 \Rightarrow$ per il Teorema $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x)=0$
- Disuguaglianza di Bernoulli
  - $(1+x)^n \geq 1+n \cdot x$ (si dimostra per induzione)

LIMITI DI SUCCESSIONI

- SUCCESSIONI A TERMINI POSITIVI
  - se $a_{n+1}/a_n \geq b_{n+1}/b_n$ $\forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n \geq c \cdot b_n$ $\forall n \geq n_0$ con $c=a_{n_0}/b_{n_0}$
  - CRITERIO DEL RAPPORTO
    - $a_{n+1}/a_n \to \ell \geq 0 \Rightarrow$
      - $\ell<1 \Rightarrow a_n \to 0$
      - $\ell>1 \Rightarrow a_n \to +\infty$
  - CRITERIO DELLA RADICE
    - $\sqrt[n]{a_n} \to \ell \geq 0 \Rightarrow$
      - $\ell<1 \Rightarrow a_n \to 0$
      - $\ell>1 \Rightarrow a_n \to +\infty$
  - CRITERIO DEL RAPPORTO→RADICE
    - $a_{n+1}/a_n \to \ell \Rightarrow \sqrt[n]{a_n}=\ell$
  - lim $a^{(1/n)}$ con $a>0$
    - $a=1 \Rightarrow a^{(1/n)}=1$
    - $a>1 \Rightarrow a^{(1/n)}$ decrescente e >1 $\forall n$ $\Rightarrow \lim a^{(1/n)}=1$
    - $a \in (0,1) \Rightarrow a^{(1/n)}$ crescente e <1 $\forall n$ $\Rightarrow \lim a^{(1/n)}=1$
    - in tutti i casi $=1$
  - $\binom{2n}{n} \leq (1+1)^n \leq 4^n$
  - LEMMA DI FEKETE
    - $a_{n+m} \leq a_n+a_m$ (cioè a_n è SUB-ADDITIVA) $\Rightarrow \lim a_n/n=\inf a_n/n$
- SUCCESSIONI A TERMINI GENERALI
  - x_n monotona, x_n limitata $\Rightarrow x_n$ converge
    - ORDINI DI INFINITO: $n^a \ll b^n \ll n! \ll n^n$ $(a>0, b>1)$
  - lim $P(n)/Q(n)$ con P e Q polinomi: si guardano gli esponenti

Sono collegati: alcuni criteri possono essere usati in entrambi i casi

LIMITI DI FUNZIONI

- Si utilizzano i criteri di confronto e altri strumenti in comune con i limiti di successioni
  - ad esempio gli ORDINI DI INFINITO: $x^a \ll b^x \ll x^x$ per $x \to +\infty$, $a>0$, $b>1$
- Nei limiti conta solo chi va più velocemente a ∞ o più lentamente a 0
- Si può usare la SOSTITUZIONE per svolgere un limite
- TEOREMI DI DE L'HOPITAL
  - $\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x)$ è della forma $0/0$ o ∞/∞ allora $\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x)=\lim_{x \to x_0} f'(x)/g'(x)$